Exercice 1.

Considérons la fonction f définie par $f(x) = (x-1)^{\frac{1}{x-2}}$.

1) Donner l'ensemble de définition de f.

2) Déterminer les limites de f à droite de 1 et en $+\infty$.

3) a) Donner un développement limité d'ordre 1 de $\dfrac{\ln(u+1)}{u}$ au voisinage de 0.

b) En déduire un développement limité d'ordre 1 de $e^{\frac{\ln(1+u)}{u}-1}$ au voisinage de 0.

c) Conclure le développement limité de f au voisinage de 2 : $f(x) = e - \dfrac{e}{2}(x-2) + o(x-2)$.

4) Montrer que f est prolongeable par continuité en 2 et que f ainsi prolongée est dérivable en 2. On donnera les valeurs de $f(2)$ et de $f'(2)$.

5) Etudier les variations de f.

6) Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

Exercice 2.

On pose $E = \mathbb{R}_2[X]$. Soit f l'application qui à tout polynôme P de E associe le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = (2X+1)P(X) - (X^2-1)P'(X).$$

1) Vérifier que f est un endomorphisme de E.

2) Ecrire la matrice A de f dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ de E.

3) Considérons les polynômes $Q_1(X) = (X-1)^2$, $Q_2(X) = (X+1)^2$, $Q_3(X) = X^2 - 1$.

a) Vérifier que (Q_1, Q_2, Q_3) constitue une base $\mathcal{B}'$ de E.

b) Montrer Q_1, Q_2 et Q_3 sont des vecteurs propres de f.

c) f est-elle diagonalisable ? f est-elle un automorphisme de E ?

4) Déduire des questions précédentes l'écriture matricielle de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on note $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n fois). Déterminer f^n pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, puis f^{-1}.

Exercice 3.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \exp\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

1) a) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$.

b) Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

c) Montrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$.

d) Déterminer les variations de f.

2) Montrer que f réalise une bijection de $\mathcal{D}_f$ sur $\mathcal{D}_f$ et déterminer $f^2 = f \circ f$. En déduire f^{-1}.

3) Soit x un réel donné dans $\mathcal{D}_f$ et soit (u_n) la suite définie par $u_0 = x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Justifier l'existence de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer u_{2n} et u_{2n+1}.

c) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que la suite (u_n) converge.

Exercice 4.

Soit n un entier au moins égal à 6. On lance n dés parfaits. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de résultats différents obtenus : ainsi $(X = 1)$ est réalisé par exemple si tous les dés donnent 3 ; $(X = 2)$ est réalisé par exemple si tous les dés donnent 2 ou 5, ces deux valeurs étant obtenues chacune au moins une fois ; et ainsi de suite.

1) Pour tout $i \in \{1, \dots 6\}$ on désigne par X_i la variable aléatoire indicatrice de l'évènement A_i : "au moins un dé donne le numéro i". Déterminer la loi de X_i, préciser son espérance et sa variance.
2) Calculer la probabilité de l'évènement $(X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)$. En déduire la covariance du couple (X_1, X_2).
3) Exprimer X à l'aide des X_i. En déduire l'espérance et la variance de X.

Exercice 5.

Le nombre de personnes qui entrent dans un grand magasin un jour donné est une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Chaque personne qui entre dans le magasin a une probabilité $p \in]0, 1[$ de se faire voler son portefeuille. On suppose que les vols de portefeuille sont des événements indépendants. On désigne par Y la variable aléatoire égale au nombre de personnes qui se font voler leur portefeuille dans le grand magasin un jour donné.
1) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Déterminer la loi de Y conditionnée par $(X = n)$, préciser son espérance et sa variance.
2) Déterminer la loi marginale de Y, préciser son espérance et sa variance.
3) On note $Z = X - Y$. Montrer que les variables aléatoires Y et Z sont indépendantes.
4) Soient n et k deux entiers naturels tels que $k \leq n$. Déterminer la probabilité pour que ce jour-là il y ait eu n clients sachant que k portefeuilles ont été volés.

Exercice 6.

Soient m et n deux entiers naturels au moins égaux à 2.
Un stand de kermesse est constitué d'une enceinte comportant n portes numérotées de 1 à n. Une partie se déroule de la manière suivante : on dispose m souris dans l'enceinte, et celles-ci sortent toutes par une porte qu'elles choisissent au hasard, de manière équiprobable et indépendamment les unes des autres. Une souris qui sort par la porte numéro i rapporte i points. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, soit X_i la variable aléatoire égale au nombre de souris qui choisissent la porte numéro i, et soit T le total des points obtenus lors d'une partie.
1) Donner la loi suivie par X_i, préciser son espérance et sa variance.
2) On pose $Y = X_1 + X_2$. Que représente Y ? Donner la loi usuelle suivie par Y, préciser son espérance et sa variance.
3) Calculer la covariance du couple (X_1, X_2), puis le coefficient de corrélation $r(X_1, X_2)$ du couple (X_1, X_2).
4) Exprimer T en fonction de $X_1, X_2, \dots, X_n$.
5) On admet que $\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} ij = \frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{24}$. Calculer l'espérance et la variance de T.
6) Pour tout $k \in \{1, \dots, m\}$, on désigne par N_k la variable aléatoire représentant le numéro de la porte choisie par la k-ième souris qui sort de l'enceinte. Déterminer la loi usuelle suivie par N_k, préciser son espérance et sa variance.
7) Exprimer T à l'aide des N_k. Retrouver la valeur de l'espérance et de la variance de T.

Exercice 7.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.
1) Montrer que $f^3 = O_E$.
2) f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?
3) Montrer que $\mathcal{B}' = (f^2(e_3), f(e_3), e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4) Donner la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}'$.
5) A est-elle diagonalisable ?
6) Montrer que si une matrice B' commute avec A', alors il existe trois réels x, y et z tels que $B' = xI_3 + yA' + zA'^2$.
7) Donner l'expression de B'^2 en fonction de I_3, A' et A'^2.

8) Combien existe-t-il de matrices B telles que $B^2 = I_3 + A$?
9) Combien existe-t-il de matrices B telles que $B^2 = A$?

Exercice 8.

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. On note φ l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique de E.

1) Montrer que A admet les valeurs propres 1 et 2 et n'en admet pas d'autre.
2) Déterminer les sous-espaces propres de φ.
3) La matrice A est-elle diagonalisable ?
4) Soit $v \in \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id}_E)$. Trouver $w \in E$ tel que $\varphi(w) = v + w$.
5) Soit $u \in \mathrm{Ker}(\varphi - 2\,\mathrm{Id}_E)$. Montrer que (u, v, w) est une base de E.
6) Déterminer la matrice A' de φ dans la base (u, v, w).
7) Montrer qu'il existe une matrice diagonalisable B et une matrice N telles que $N^2 = O_3$, $BN = NB$ et $N + B = A$.

En déduire un procédé de calcul de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9.

Soit n un entier au moins égal à 2, et soit P un polynôme de degré n à coefficients réels. On note Q le polynôme défini par $Q = P + P' + P'' + \cdots + P^{(n)}$.

1) Calculer $Q - Q'$.
2) En dérivant la fonction h définie par $h(x) = Q(x)e^{-x}$. En déduire qu'il existe une constante réelle C telle que pour tout réel x on a : $Q(x) = -e^x \displaystyle\int_0^x P(t)e^{-t}dt + Ce^x$.
3) Soit g la fonction définie par $g(x) = Q(x)e^{-x}$: quelle est la limite de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$?
4) En déduire la valeur de C sous la forme d'une intégrale généralisée.
5) On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $P(x) \geq 0$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $Q(x) \geq 0$.

Exercice 10.

On dispose d'une urne contenant une boule rouge et une boule blanche, et d'un stock illimité de boules rouges et blanches.

On effectue une suite de tirages avec remise dans l'urne de la boule tirée. Soit X la variable aléatoire égale au rang du premier tirage auquel on a tiré une boule blanche.

1) On suppose dans cette question que l'on ne rajoute aucune boule après chaque tirage, autrement dit que l'urne contient toujours une boule rouge et une boule blanche. L'espace d'épreuves Ω est ainsi muni d'une probabilité P_1. Déterminer la loi de X pour P_1, autrement dit donner la valeur de $P_1(X = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Préciser l'espérance et la variance de X.
2) On suppose dans cette question qu'après chaque tirage d'une boule, on rajoute une boule blanche dans l'urne. L'espace d'épreuves Ω est ainsi muni d'une probabilité P_2.
a) Pour tout $i \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on note A_i l'événement "on obtient une boule rouge au i-ième tirage". Pour $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, exprimer l'événement $(X \geq k)$ à l'aide des A_i. En déduire la valeur de $P_2(X \geq k)$.
b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on a $P_2(X = k) = \dfrac{k}{(k+1)!}$.
c) Vérifier que l'on définit bien ainsi pour X une loi de variable aléatoire. On pourra écrire $k = (k+1) - 1$.
d) Préciser si l'espérance et la variance de X existent et dans ce cas, calculer leur valeur.
3) On suppose dans cette question qu'après chaque tirage d'une boule, on rajoute une boule rouge dans l'urne. L'espace d'épreuves Ω est ainsi muni d'une probabilité P_3.
a) Déterminer la loi de X pour P_3, autrement dit calculer $P_3(X = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.
b) Vérifier que l'on définit bien ainsi pour X une loi de variable aléatoire.
c) Préciser si l'espérance et la variance de X existent, et dans ce cas, calculer leur valeur.

Correction Oral de l'ENSAI 2013

Exercice 1.

1) $\mathcal{D}_f =]1,2[\cup]2,+\infty[$.

2) On écrit $f(x) = \exp(\frac{1}{x-2}\ln(x-1))$. On a alors $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{1}{x-2} = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \ln(x-1) = -\infty$. Par produit, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{1}{x-2}\ln(x-1) = +\infty$ et pour finir, on compose avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$ pour obtenir $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \boxed{+\infty}$.

Pour la limite en $+\infty$, on factorise : $\dfrac{\ln(x-1)}{x-2} = \dfrac{\ln\left(x\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)} = \dfrac{\ln x}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)} + \dfrac{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{0}$.

3) a) Pour avoir l'ordre 1, il faut écrire l'ordre 2 de $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$. Ce qui donne pour $DL_1(0)$: $\dfrac{\ln(u+1)}{u} = 1 - \frac{u}{2} + o(u)$.

b) On trouve alors $e^{\frac{\ln(1+u)}{u}-1} = e^{\frac{-u}{2}+o(u)} = 1 - \frac{u}{2} + o(u)$.

c) On pose $u = x-2$ et on a $f(x) = \exp\left(\frac{\ln(u+1}{u}\right) = e \times \exp\left(\frac{\ln(u+1}{u} - 1\right) = e \times \left(1 - \frac{u}{2} + o(u)\right) = e - \dfrac{e}{2}(x-2) + o(x-2)$.

4) On calcule $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln(x-1) - \ln(2-1)}{x-2}$ qui est le taux d'accroissement de $g : x \longmapsto \ln(x-1)$ en 2. Donc $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln(x-1)}{x-2} = g'(2) = \dfrac{1}{2-1} = 1$ et par composition, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = e$. Ainsi, f est prolongeable par continuité en 2.

Pour la dérivabilité, il nous faut calculer la limite du taux de f : $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\exp\left(\frac{\ln(x-1)}{x-2}\right) - e}{x-2}$.

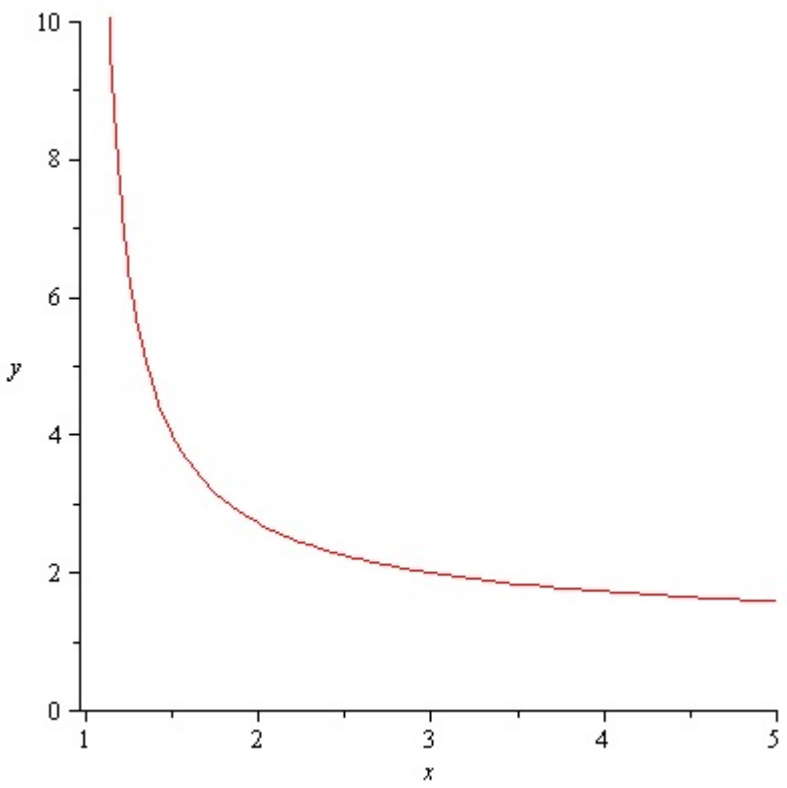
Grâce au DL précédent, on a $\dfrac{\exp\left(\frac{\ln(x-1)}{x-2}\right) - e}{x-2} = \dfrac{-e}{2} + o(1)$. Donc f est dérivable en 2 et $f'(2) = \dfrac{-e}{2}$.

5) On commence par calculer la dérivée de f par la formule de la composition : $(u\circ v)' = v' \times u' \circ v$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x-1}\times(x-2) - \ln(x-1)}{(x-2)^2} \times e^{\left(\frac{1}{x-2}\ln(x-1)\right)} = \frac{(x-2) - (x-1)\ln(x-1)}{(x-1)\times(x-2)^2} \times e^{\left(\frac{1}{x-2}\ln(x-1)\right)}.$$

Le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur : $h(x) = (x-1)[1-\ln(x-1)] - 1 = X[1-\ln X] - 1$ avec $X > 0$. On dérive à nouveau et on trouve $-\ln X$ qui est positif sur $]0,1]$ et négatif sur $[1,+\infty[$. Or $h(2) = 0$, donc $h(x) \leq 0$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ et f est décroissante sur $]1,+\infty[$.

6)



2013-01.jpg

Exercice 2.

1) Le résultat est clairement un polynôme car les opérations mises en oeuvre sont stables sur les polynômes (y compris la dérivée).

Il reste à vérifier que le degré est le bon. On écrit $P(X) = aX^2 + bX + c$. Donc $Q(X) = (2X + 1)(aX^2 + bX + c) - (X^2 - 1)(2aX + b) = (a + b)X^2 + (2a + b + 2c)X + (b + c)$ qui est bien du bon degré pour appartenir à E.

2) En utilisant le calcul précédent, on trouve $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3) a) On résout $\alpha Q_1 + \beta Q_2 + \gamma Q_3 = 0_E$. En développant, cela donne $(\alpha+\beta+\gamma)X^2+(-2\alpha+2\beta)X+(\alpha+\beta-\gamma) = 0$ pour tout X. La résolution du système donne bien $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

b) On calcule les images via la matrice ou le calcul de la question 1 et on trouve $f(Q_1) = -Q_1$, $f(Q_2) = 3Q_2$ et $f(Q_3) = Q_3$.

c) Oui, f est diagonalisable car elle n'a que des valeurs propres simples. De plus, ces valeurs propres sont non nulles, donc elle est bijective et il s'agit d'un automorphisme.

4) On écrit une matrice de passage : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On calcule $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et

$$A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (-1)^n + 3^n + 2 & -(-1)^n + 3^n & (-1)^n + 3^n - 2 \\ -2(-1)^n + 2 \times 3^n & 2(-1)^n + 2 \times 3^n & -2(-1)^n + 2 \times 3^n \\ (-1)^n + 3^n - 2 & -(-1)^n + 3^n & (-1)^n + 3^n + 2 \end{pmatrix}$$

5) On a $\mathrm{Mat}(f^n) = A^n$, donc, si $P(X) = aX^2 + bX + c$, alors

$$f^n(P)(X) = \frac{1}{4}\left[\left((-1)^n + 3^n + 2\right)c + \left(-(-1)^n + 3^n\right)b + \left((-1)^n + 3^n - 2\right)a\right] +$$
$$\frac{1}{4}\left[\left(-2(-1)^n + 2\times 3^n\right)c + \left(2(-1)^n + 2\times 3^n\right)b + \left(-2(-1)^n + 2\times 3^n\right)a\right]X +$$
$$\frac{1}{4}\left[\left((-1)^n + 3^n - 2\right)c + \left(-(-1)^n + 3^n\right)b + \left((-1)^n + 3^n + 2\right)a\right]X^2.$$

Exercice 3.

1) a) Il faut $x > 0$ et $\ln x \neq 0$. Donc $\mathcal{D}_f =]0,1[\cup]1,+\infty[$.

b) <u>En 0 à droite :</u> On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{\ln x} = 0$, donc par composition avec exp, on trouve $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \boxed{1}$.

<u>En 1 :</u> A gauche tout d'abord, on a $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \ln x = 0$ par valeurs négatives et donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{1}{\ln x} = -\infty$ et par composition là encore, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \boxed{0}$.

A droite, on procède de la même façon et on trouve $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} = \boxed{+\infty}$.

<u>En $+\infty$:</u> On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\ln x} = 0$ et par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{1}$.

c) La fonction ln est dérivable sur son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$, à valeurs dans $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Donc par quotient, $x \longmapsto \frac{1}{\ln x}$ est dérivable sur $\mathcal{D}_f$; et par composition avec exp qui est dérivable partout, on a bien que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$.

Pour le calcul de la dérivée, on utilise $(e^u)' = u'e^u$:

$$f'(x) = \frac{-1}{x\ln^2 x} \times \exp\left(\frac{1}{\ln x}\right).$$

d) Le signe de $f'(x)$ est celui de $\frac{-1}{x}$, donc négatif sur $\mathcal{D}_f$. Ainsi, f est décroissante sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$.

2) On calcule

$$\exp\left(\frac{1}{\ln x}\right) = y \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{\ln x} = \ln y \quad\Leftrightarrow\quad \ln x = \frac{1}{\ln y} \quad\Leftrightarrow\quad x = \exp\left(\frac{1}{\ln y}\right).$$

Donc $f^{-1} = f$.

3) a) D'après ce qui précède, comme $f : \mathcal{D}_f \longmapsto \mathcal{D}_f$, on assure bien l'existence de $u_{n+1} = f(u_n) \in \mathcal{D}_f$ pour tout n par récurrence immédiate.

b) Comme $f^{-1} = f$, on a $f^2 = \mathrm{Id}$. Ainsi, $u_{2n} = f^{2n}(u_0) = (f^2)^n(u_0) = u_0$ et pour les mêmes raisons, $u_{2n+1} = f(u_0) = u_1$.

c) Il faut que $u_0 = u_1$, autrement dit, que u_0 soit un point fixe de f :

$$\exp\left(\frac{1}{\ln \alpha}\right) = \alpha \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{\ln \alpha} = \ln \alpha \quad\Leftrightarrow\quad 1 = \ln^2 \alpha.$$

Ce qui donne $u_0 = e$ ou $u_0 = e^{-1}$.

Exercice 4.

1) On a $p(A_i) = 1 - p(\overline{A_i}) = 1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^n$. D'où son espérance $E(X_i) = 1\times\left(1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^n\right) + 0\times\left(\dfrac{5}{6}\right)^n = 1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^n$. Et comme $E(X_i^2) = E(X_i)$, on a

$$V(X_i) = E(X_i^2) - (E(X_i))^2 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^2 = \left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{5}{6}\right)^{2n}.$$

2) $p\left((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Pour la covariance : $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2)$. Or $p\left((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)\right) = 1 - p\left((X_1 = 0) \cup (X_2 = 0)\right) = 1 - p(X_1 = 0) - p(X_2 = 0) + p\left((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)\right) = 1 - 2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Donc

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{5}{6}\right)^{2n}$$

3) On a $X = \sum_{i=1}^{6} X_i$. Donc

$$E(X) = \sum_{i=1}^{6} E(X_i) = 6 \times \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)$$

et

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i=1}^{6} V(X_i) + 2 \sum_{1 \le i < j \le 6} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) \\ &= 6\left(\left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{5}{6}\right)^{2n}\right) + 2\binom{6}{2}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{5}{6}\right)^{2n}\right) \\ &= \boxed{6\left(\frac{5}{6}\right)^n - 36\left(\frac{5}{6}\right)^{2n} + 30\left(\frac{2}{3}\right)^n}. \end{aligned}$$

Exercice 5.

1) On se place dans l'hypothèse que $(X = n)$, chacune des n personnes a une probabilité p de se faire voler. La loi de Y, conditionnée à $(X = n)$ est donc la répétition de n épreuve de Bernoulli indépendantes ayant même probabilité de "succès" (à savoir le vol), égale à p. Il s'agit donc d'une loi binomiale de paramètres n et p. Son espérance est donc np et sa variance npq.

2) Par définition (probabilités totales), on a

$$\begin{aligned} p(Y = k) &= \sum_{j=0}^{+\infty} p((X = j) \cap (Y = k)) = \sum_{j=k}^{+\infty} p_{(X=j)}(Y = k)p(X = j) \\ &= \sum_{j=k}^{+\infty} \binom{j}{k} p^k (1-p)^{j-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} = \frac{p^k}{k!}\lambda^k e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{j=k}^{+\infty} \frac{[(1-p)\lambda]^{j-k}}{(j-k)!}}_{e^{(1-p)\lambda}} \\ &= \frac{(p\lambda)^k}{k!} e^{-p\lambda}. \end{aligned}$$

La variable aléatoire Y suit donc une loi exponentielle de paramètre λp, d'espérance et de variance $p\lambda$.

3) On calcule

$$\begin{aligned} p((Z = j) \cap (Y = k)) &= p((X = j + k) \cap (Y = k)) = p_{(X=j+k)}(Y = k)p(X = j + k) \\ &= \binom{j+k}{k} p^k (1-p)^j e^{-\lambda} \frac{\lambda^{j+k}}{(j+k)!} \\ &= \frac{(\lambda p)^k (\lambda(1-p))^j}{k!j!} e^{-\lambda} \end{aligned}$$

Puis avec les probabilités totales,

$$p(Z=j)=\sum_{k=0}^{+\infty}p((X=j+k)\cap(Y=k))=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\lambda p)^k(\lambda(1-p))^j}{k!j!}e^{-\lambda}$$
$$=\frac{(\lambda(1-p))^je^{-\lambda}}{j!}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\lambda p)^k}{k!}=\frac{(\lambda(1-p))^je^{-\lambda}}{j!}e^{\lambda p}.$$

Et en multipliant par $p(Y=k)$, on retrouve bien $p((Z=j)\cap(Y=k))$, donc les variables Y et Z sont indépendantes.

4) On cherche donc

$$p_{(Y=k)}(X=n)=\frac{p((X=n)\cap(Y=k))}{p(Y=k)}=\frac{\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}}{\dfrac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p}}$$
$$=\frac{\lambda^n(1-p)^{n-k}e^{\lambda(p-1)}}{(n-k)!}.$$

Exercice 6.

1) Loi binomiale de paramètres m et $p=\frac{1}{n}$. Donc $E(X_i)=\frac{m}{n}$ et $V(X_i)=mpq=\frac{m(n-1)}{n^2}$.

2) Le nombre de souris sortant par les deux portes 1 et 2. Il s'agit encore d'une loi binomiale de paramètres m et $p=\frac{2}{n}$. D'où $E(Y)=\frac{2m}{n}$ et $V(Y)=\frac{2m(n-2)}{n^2}$.

3) On a donc $V(X_1+X_2)=V(X_1)+V(X_2)+2\operatorname{Cov}(X_1,X_2)$. Ainsi, $\operatorname{Cov}(X_1,X_2)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2m(n-2)}{n^2}-2\dfrac{m(n-1)}{n^2}\right)=$ $\boxed{\dfrac{-m}{n^2}}$.

D'autre part, $r(X_1,X_2)=\dfrac{\operatorname{Cov}(X_1,X_2)}{\sqrt{V(X_1)V(X_2)}}=\dfrac{\frac{-m}{n^2}}{\frac{2m(n-2)}{n^2}}=\boxed{\dfrac{-1}{2(n-2)}}$.

4) $T=\sum_{i=1}^{n}iX_i$.

5) L'espérance est linéaire, donc $E(T)=\sum_{i=1}^{n}E(iX_i)=\left(\sum_{i=1}^{n}i\right)\times\dfrac{m}{n}=\dfrac{m(n+1)}{2}$.

Pour la variance, $V(T)=\sum_{i=1}^{n}V(iX_i)+\sum_{i\neq j}\operatorname{Cov}(iX_i,jX_j)=\sum_{i=1}^{n}i^2V(X_i)+\sum_{i\neq j}ij\operatorname{Cov}(X_i,X_j)=$ $\dfrac{m(n-1)}{n^2}\times\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\dfrac{-m}{n^2}\times\dfrac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{24}\times2=\dfrac{m(n^2-1)}{12n}[2(2n+1)-(3n+2)]=$ $\boxed{\dfrac{m(n^2-1)}{12}}$.

On utilise le fait que $\sum_{i\neq j}ij=2\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}ij$.

6) Loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. d'où l'espérance $E(N_k)=\dfrac{n+1}{2}$ et la variance $V(N_k)=\dfrac{n^2-1}{12}$.

7) On a $T=\sum_{k=1}^{m}N_k$. Donc $E(T)=\sum_{k=1}^{m}E(N_k)=\dfrac{m(n+1)}{2}$.

Quant à la variance, on trouve

$$V(T)=\sum_{k=1}^{m}V(N_k)+\sum_{i\neq j}\operatorname{Cov}(N_i,N_j)=\boxed{\frac{m(n^2-1)}{12}}+2\times\binom{m}{2}\underbrace{\operatorname{Cov}(N_1,N_2)}_{0}$$

car les variables N_1 et N_2 sont indépendantes.

Exercice 7.

1) On calcule $A^3 = 0$.

2) Non car il ne peut être bijectif.

3) On a $f(e_3) = (0, 2, 0)$. Donc $f^2(e_3) = (2, 0, 4)$. Pour voir qu'il s'agit d'une base, il suffit de calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

4)

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5) Non elle ne l'est pas car $\mathrm{Spec}(A) = \{0\}$. Donc si elle l'était, elle serait nulle, ce qui n'est pas le cas.

6) On y va finement en posant $B' = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. On obtient alors

$$B'A' = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{pmatrix} \qquad A'B' = \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par identification, on trouve $d = g = h = 0$, $a = e = i$ et $b = f$. Donc $B' = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} = xI_3 + yA' + zA'^2$.

7) On utilise le fait que A' est nilpotente d'ordre 3 et la commutativité dans ce cas particulier.

$B'^2 = (xI_3 + yA' + zA'^2)^2 = x^2I_3 + y^2A'^2 + 2xyA' + 2xzA'^2 = x^2I_3 + 2xyA' + (y^2 + 2xz)A'^2$.

8) En composant avec le changement de base P, on obtient $PB^2P^{-1} = I_3 + PAP^{-1} = I_3 + A'$. En appelant (par anticipation un peu il est vrai $B' = PBP^{-1}$), on a B' qui commute avec A' car $B'^3 - B' = A'B' = B'A'$. Donc B' est bien de la forme ci-dessus et $B'^2 = x^2I_3 + 2xyA' + (y^2 + 2xz)A'^2$. Par identification, on a

$$\begin{cases} x^2 = 1 \\ 2xy = 1 \\ y^2 + 2xz = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm \frac{1}{2} \\ z = \frac{-y^2}{2x} \end{cases}.$$

Soit deux solutions : $(x, y, z) \in \{(1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{8}), (-1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{8})\}$.

9) De la même façon, après avoir vérifié la commutativité, on résout

$$\begin{cases} x^2 = 0 \\ 2xy = 1 \\ y^2 + 2xz = 0 \end{cases}$$

qui n'a pas de solution.

Exercice 8.

1) On calcule le polynôme caractéristique :

$$\chi_A(X)=\begin{vmatrix} X+1 & 1 & -2 \\ -1 & X-2 & 1 \\ 2 & 1 & X-3 \end{vmatrix} \underset{C_1\leftarrow C_1+C_3}{=} \begin{vmatrix} X-1 & 1 & -2 \\ 0 & X-2 & 1 \\ X-1 & 1 & X-3 \end{vmatrix} =$$
$$(X-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & X-2 & 1 \\ 1 & 0 & X-3 \end{vmatrix} \underset{C_2\leftarrow C_2-C_1}{=} (X-1)(X-2)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & X-3 \end{vmatrix} = (X-1)^2(X-2).$$

Donc $\mathrm{Spec}(A)=\{1;2\}$.

2) On trouve $V_1=\mathrm{Vect}((1,0,1))$ et $V_2=\mathrm{Vect}((1,-1,1))$.

3) Elle ne l'est pas car $\dim V_1=1$ alors que la valeur propre est de multiplicité algébrique 2.

4) On pose $w=(x,y,z)$, on doit donc résoudre

$$\begin{cases} -x-y+2z &= 1+x \\ x+2y-z &= y \\ -2x-y+3z &= 1+z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x-y+2z=1 \\ x+y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y,z)=(x,1,x+1)$$

On peut prendre $w=(0,1,1)$

5) On calcule le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

6) On trouve $A'=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7) Il s'agit d'une décomposition de Dunford. On utilise la trigonalisation précédente en prenant $A'=D+C$ avec $D=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est nilpotente d'ordre 2.

En utilisant le changement de base réciproque, on trouve bien deux matrices $A=PA'P^{-1}=\underbrace{PDP^{-1}}_{B}+\underbrace{PNP^{-1}}_{N}$. Il suffit de vérifier que $N^2=PCP^{-1}PCP^{-1}=PC^2P^{-1}=O_3$ et $BN=PDP^{-1}PCP^{-1}=PDCP^{-1}=PCDP^{-1}=NB$ car C et D commutent (la seconde est diagonale).

Exercice 9.

1) Par télescopage, $Q-Q'=P-P^{(n+1)}=P$ car P est de degré n.

2) On a $h'(x)=Q'(x)e^{-x}-Q(x)e^{-x}=-P(x)e^{-x}$. Or $\displaystyle\int_0^x P(t)e^{-t}dt$ est la primitive de $x\longmapsto P(x)e^{-x}$ qui s'annule en 0. Donc on a bien l'existence d'une constante C telle que $Q(x)=-e^x\displaystyle\int_0^x P(t)e^{-t}dt+Ce^x$.

3) Pourquoi g alors qu'elle s'appelait h à la question précédente ?

Bref, on utilise $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^k}{e^x}=0$ pour arriver à $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$.

4) Donc $0=\lim\limits_{x\to+\infty}Q(x)e^{-x}=-\displaystyle\int_0^{+\infty}P(t)e^{-t}dt+C$ et $C=\displaystyle\int_0^{+\infty}P(t)e^{-t}dt$.

5) On trouve alors $g(x)=\displaystyle\int_x^{+\infty}P(t)e^{-t}dt\geq 0$, donc $Q(x)e^{-x}\geq 0$ et $Q(x)\geq 0$.

Exercice 10.

1) La loi de X est géométrique sur $\mathbb{N}^*$, de paramètre $p=\frac{1}{2}$. Donc $P_1(X=k)=q^{k-1}p=\frac{1}{2^k}$. D'où l'espérance $E(X)=\frac{1}{p}=2$ et $V(X)=\frac{q}{p^2}=2$.

2) a) On a clairement $(X \geq k) = \bigcap_{i=1}^{k-1} A_i$. Et comme $p(A_i) = \frac{1}{i+1}$ et que les évènements sont indépendants, on trouve donc $P_2(X \geq k) = \prod_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i+1} = \frac{1}{k!}$.

b) Donc $P_2(X = k) = P_2(X \geq k) - P_2(X \geq k+1) = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{k}{(k+1)!}$.

c) Il suffit de vérifier que la somme des probabilités donne bien 1 :

$$\sum_{k=1}^{N} P_2(X = k) = \sum_{k=1}^{N} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{N} \frac{k+1}{(k+1)!} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!} - \sum_{k=2}^{N+1} \frac{1}{(k)!} = 1 - \frac{1}{(N+1)!}.$$

Donc $\sum_{k=1}^{+\infty} P_2(X = k) = 1$ en passant à la limite.

d) On doit calculer la limite de $\sum_{k=1}^{N} kP_2(X = k) = \sum_{k=1}^{N} \frac{k^2}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{N} \frac{k(k+1)-k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=1}^{N} \frac{k}{(k+1)!}$ Et à la limite, cela donne $E(X) = \boxed{e-1}$.

Pour la variance, on a besoin du moment d'ordre 2 :

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^3}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(k-1)k(k+1)+k}{(k+1)!} = \underbrace{\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(k-2)!}}_{e} + \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{(k+1)!}}_{=1} = e+1$$

D'où la variance : $V(X) = e + 1 - (e-1)^2 = \boxed{3e - e^2}$.

3) a) De la même façon que précédemment, on utilise les évènements B_i qui correspondent aux événements "on obtient une boule rouge au i-ième tirage". Pour $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on a l'événement $(X \geq k) = \bigcap_{i=1}^{k-1} B_i$. Et comme $p(B_i) = \frac{i}{i+1}$ et que les évènements sont indépendants, on trouve donc $P_3(X \geq k) = \prod_{i=1}^{k-1} \frac{i}{i+1} = \frac{1}{k}$.

On a donc pour tout $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on a $P_3(X = k) = P_3(X \geq k) - P_3(X \geq k+1) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$.

b) La somme donne un télescopage : $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1$.

c) L'espérance est la limite de $\sum_{k=1}^{N} \frac{k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k+1}$ qui diverge en tant que série harmonique.